

Σεπτέμβριος 2023, Απειροστικός Λογισμός 1

Διάρκεια 3 Ώρες

Θέμα 1 (2 Μονάδες)

Έστω μια αύξουσα ακολουθία πραγματικών αριθμών $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- (α) Αν η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι άνω φραγμένη, ναδειχθεί ότι συγχλίνει.
- (β) Αν η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ δεν είναι άνω φραγμένη, ναδειχθεί ότι $\lim_n a_n = +\infty$.

Θέμα 2 (3 Μονάδες)

- (α) Αποκλειστικά με χρήση του ορίου, ναδειχθεί ότι η ακολουθία $b_n = 2 + \frac{7}{\sqrt[3]{n}}$, $n \in \mathbb{N}$ συγχλίνει προς το 2
- (β) Δίνεται η ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με $x_1 = 8$ και $x_{n+1} = 12 + \sqrt{2x_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Ναδειχθεί ότι η $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι συγχλίνουσα και να υπολογίσετε το όριό της (Υπόδειξη: Δείξτε πρώτα ότι η $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι αύξουσα και άνω φραγμένη)
- (γ) Να εξετασθεί ως προς τη σύγκλιση την ακολουθία $y_n = \sqrt{n^2 + 6n} - \sqrt{n^2 + 2n}$, $n \in \mathbb{N}$.
- (δ) Αν $a > 1$, ναδειχθεί ότι $\lim_n \frac{n}{a^n} = 0$. Έπειτα, να υπολογιστεί το όριο $\lim_n \frac{n + 5^n}{n + 6^n}$.

Θέμα 3 (1,5 Μονάδες)

Έστω $f: [2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση για την οποία $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Ναδειχθεί ότι η f έχει ελάχιστη τιμή.

Θέμα 4 (2 Μονάδες) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = xe^x$, $x \in \mathbb{R}$. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα, τα σημεία καμπής, τις ασύμπτωτες (οριζόντιες - κατακόρυφες) και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.

Θέμα 5 (1,5 Μονάδες) Δίνονται δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $f'(x)g(x) \neq f(x)g'(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

- (α) Ναδειχθεί ότι ανάμεσα σε δύο ρίζες της f , υπάρχει ρίζα της g (και ότι ανάμεσα σε δύο ρίζες της g , υπάρχει ρίζα της f).
- (β) Ναδειχθεί ότι ανάμεσα σε δύο διαδοχικές ρίζες της f , υπάρχει ακριβώς μία ρίζα της g .

(Σημείωση: Δύο ρίζες μιας συνάρτησης f ονομάζονται διαδοχικές αν δεν υπάρχει ανάμεσά τους άλλη ρίζα της f)

ΚΑΛΗ ΤΥΧΗ!!